DM ~ Arithmétique

1 - Triplets pythagoriciens

Soient x , y et z trois entiers naturels. On considère l'équation (E) :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Toute solution dans $\mathbb{N}$ de (E) est appelé **triplet pythagoricien**.

1. Montrer que $(3; 4; 5)$ est un triplet pythagoricien puis déterminer un triplet pythagoricien dont un des termes vaut 500 et les autres sont non nuls.
2. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, dont on expliquera les lignes 4 et 5, déterminer la probabilité qu'un triplet soit un triplet pythagoricien lorsque chacun des nombres le composant est compris entre 0 et 100.

```
from math import floor, sqrt
c = 0
for i in range(0,101):
    for j in range(0,101):
        if sqrt(i**2+j**2) == floor(sqrt(i**2+j**2)):
            if i**2+j**2 < 10001:
                c = c+1
print(c)
```

3. Montrer qu'un triplet pythagoricien ne contenant pas 0 ne peut contenir deux termes identiques.
4. Soit $(x; y; z)$ un triplet pythagoricien et d un diviseur commun à x , y et z .
Montrer que $(\frac{x}{d}; \frac{y}{d}; \frac{z}{d})$ est un triplet pythagoricien.
5. Soient u et v deux entiers naturels tels que $u > v$. Montrer que le triplet $(u^2 - v^2; 2uv; u^2 + v^2)$ est un triplet pythagoricien.
6. À partir de la question précédente, déterminer un triplet pythagoricien dont tous les termes sont supérieurs à 1 000 en détaillant les calculs.

2 - Égalité de Sophie Germain

Pour tout entier naturel n , on définit le nombre $P(n) = n^4 + 4$ et on cherche à déterminer pour quelles valeurs de n , $P(n)$ est premier.

1. Déterminer si $P(15)$ et $P(17)$ sont des nombres premiers ou non.
2. Soient n et m deux entiers naturels. Montrer que :

$$n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn).$$

3. En déduire une factorisation pour $P(n)$.
4. Déterminer alors que $n^4 + 4$ est premier si et seulement si $n = 1$.
5. Démontrer que $4^{545} + 545^4$ n'est pas premier.